Développement : Groupe simple d'ordre 60.

RM

2022-2023

Référence :

1. Algèbre tome 2 groupes

Énoncé :

Théorème 1 : Soit G un groupe simple d'ordre 60. Alors $G \cong \mathcal{A}_5$.

Lemme 2 : Si H est d'indice 2 dans G, alors H est distingué dans G.

Démonstration : Le sous-groupe H de G est un sous-groupe strict de G et le complémentaire de H dans G est non vide. Soit g un élément de ce complémentaire. On a la partition

$$G = H \cup gH.$$

Nous savons que G/H est en bijection avec l'ensemble des classes à droite H/G par l'application $xH \mapsto Hx$. Il existe donc une seule classe à droite non trivial. Comme $g \notin H$, cette classe est Hg est on a aussi la partition

$$G = H \cup Hg.$$

D'où $gH = Hg$. Si $g \in H$, on a bien cette égalité aussi.

Lemme 3 : Si $n \neq 4$, le seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{Id\}, \mathcal{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration Pour $n = 2$, on a $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont les sous-groupes distingués sont bien de la forme indiquée. Supposons $n \geq 3$ et $n \neq 4$et soit H un sous-groupe distingué dans $\mathfrak{S}_n$. Le sous-groupe $H \cap \mathcal{A}_n$ est distingué dans $\mathcal{A}_n$, ce qui implique que $H \cap \mathcal{A}_n = \{Id\}$ ou $\mathcal{A}_n$. Dans le premier cas, on a donc que H contient seulement l'identité ayant une signature de 1, donc que la restriction de $\varepsilon_{|H}$ à H est injective, et donc par 1er théorème d'isomorphisme, on a que $|H| \leq 2$. Si $H = \{Id, \tau\}$ avec τ d'ordre 2, on a, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau$ car H est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.
On en déduit que $\tau \in Z(\mathfrak{S}_n) = \{Id\}$ car $n \geq 3$, ce qui est contradictoire. Dans le second cas, on a $\mathcal{A}_n \subset H$ et si $\mathcal{A} \neq H$, l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$ est < 2, et donc $H = \mathfrak{S}_n$.

Démonstration (Théorème 1) : Soit G un groupe simple d'ordre 60. On veut faire agir G sur un ensemble de cardinal 5, par exemple un quotient G/H, où H est un sous-groupe de G d'indice 5 (H ne peut être distingué puisque G est simple). L'existence de H ne peut être prédite par le théorème de Sylow puisque H est de cardinal 12 qui n'est pas une puissance d'un nombre premier. Supposons par l'absurde que

H : Il n'existe pas de sous-groupe strict de G d'indice ≤ 5.

On a

$$|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

Regardons l'ensemble $S_2(G)$ constitué des 2-Sylow de G. Son cardinal $n_2(G)$ divise 15 et est congrus à 1 modulo 2. L'action de G sur $S_2(G)$ par conjugaison étant transitive, on a alors une seule orbite pour l'action et donc pour tout pour tout $P \in S_2(G)$, on a que $|Orb(P)| = |S_2(G)| = n_2(G)$. D'après la seconde formule des classes, on a que $|G| = |Orb(P)||Stab(P)| = n_2(G)|Stab(P)|$. Comme $Stab(P)$ est un sous groupe de G, on a finalement que $n_2(G) = |G|/|Stab(P)| = [G : Stab(P)]$. D'après **H**, on a donc que $n_2(G) \neq 3, 5$. Si $n_2(G) = 1$, il n'y a qu'un seul 2-Sylow dans G et il est distingué, ce qui contredit le fait que G est simple. On a finalement que $n_2(G) = 15$. On va maintenant faire du dénombrement dans G. Montrons d'abords que, si S_1 et S_2 sont des 2-Sylow distinct de G, alors

$$S_1 \cap S_2 = \{1\}$$

Soit en effet $g \in S_1 \cap S_2$. Les 2-Sylow sont d'ordre $4 = 2^2$ (groupe d'ordre p^2) et sont donc abélien. Donc le centralisateur $C(g)$ (formé des éléments qui commutent à g) contient $S_1 \cup S_2$ qui est de cardinal > 4. Ce centralisateur contient S_1, donc $|C(g)|$ est un multiple de 4 par le théorème de Lagrange. Par ce même théorème, $|C(g)|$ divise $|G|$, ce qui laisse comme seules possibilités :

$$|C(g)| = 12, 20 \text{ ou } 20.$$

Comme $60/12 = 5$ et $60/20 = 3$, on a d'après **H** que $|C(g)| = 60$, donc que $g \in Z(G)$, mais comme le centre d'un groupe est distingué, on a $Z(G) = \{e\}$ ou $Z(G) = G$. Or si $Z(G) = G$, alors G est un groupe abélien de cardinal non premier, donc n'est pas simple. On a donc $Z(G) = \{E\}$ et donc $g = e$. L'intersection de deux 2-Sylow quelconques est donc triviale, et leur réunion, formée d'éléments de G d'ordre 2 ou 4, est de cardinal $15 \times (4 - 1) = 45$. On dénombre maintenant les éléments d'ordre 5 : le nombre $n_5(G)$ de 5-Sylow dans G divise 12 et $n_5(G) = 1 \pmod 5$, ce qui conduit à $n_5(G) = 6$ (on a encore une fois que $n_5(G) \neq 1$ par simplicité de G).
Chacun de ces 5-Sylow est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et deux 5-Sylow distincts ont une intersection réduite à $\{1\}$ car cyclique. L'ensemble des éléments d'ordre 5 est donc de cardinal $6 \times (5 - 1) = 24$. Mais $45 + 24 = 69 > 60$, ce qui est absurde.il existe donc un sous-groupe H de G d'indice ≤ 5.

• Supposons que $[G : H] = 5$. Alors l'action naturelle de G sur G/H($g \mapsto g.g'H = (gg')H$) induit un morphisme de groupe non trivial ϕ de G dans $\mathfrak{S}_5$. Comme le noyau d'un morphisme est un sous-groupe distingué, on a que $ker\phi = \{e\}$ car ϕ est non trivial et donc ϕ est injectif. Le groupe G est donc isomorphe à l'image de ϕ, qui est donc un sous groupe de cardinal 60 de $\mathfrak{S}_5$, donc d'indice 2; on en déduit que il est distingué car d'indice 2. Cela impose $G \cong \mathcal{A}_5$ d'après le lemme.

• Si $[G : H] \leq 4$, le même argument montre qu'on a un morphisme injectif ϕ de G dans $\mathfrak{S}_4$ mais $|G| = 60 > |\mathfrak{S}_4| = 24$ et on aboutit à une contradiction.
On a donc bien que $G \cong \mathcal{A}_5$.